Całki nieoznaczone

Adam Gregosiewicz

27 maja 2010

1 Własności

a) Jeżeli $F'(x) = f(x)$, to
$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$
dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

b) Jeżeli $a \in \mathbb{R}$, to
$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

c) Jeżeli f i g są funkcjami całkowalnymi, to
$$\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

2 Wzory podstawowe

a) $\displaystyle\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, dla $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

d) $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,ctg} x + C.$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C.$

f) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + C.$

g) $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$.

h) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

i) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

$j)$ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

$k)$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

$l)$ $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C.$

$m)$ $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C.$

$n)$ $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C.$

$o)$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = \operatorname{ctgh} x + C.$

3 Całkowanie przez podstawienie

Jeżeli funkcja φ jest różniczkowalna w sposób ciągły, to całkę $\displaystyle\int f(x)\,dx$ można przekształcić, podstawiając $x = \varphi(t)$. Wtedy

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Czasami jednak lepiej jest wykonać podstawienie $t = \varphi(x)$. Należy wtedy (o ile to możliwe), korzystając z formalnego równania $dt = \varphi'(x)\,dx$, zapisać $f(x)\,dx$ jako $g(t)\,dt$ dla pewnej funkcji g. Wtedy, jeżeli

$$\int g(t)\,dt = F(t) + C,$$

to

$$\int f(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C.$$

4 Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne, to zachodzi wzór

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Wybór funkcji f oraz g bywa trudny. Najczęściej jednak za funkcję f należy przyjąć tę, która występuje wcześniej w poniższej liście:

$a)$ funkcje logarytmiczne (np. $\ln x$),

$b)$ funkcje cyklometryczne (np. $\arcsin x$),

$c)$ funkcje algebraiczne (np. x^5),

$d)$ funkcje trygonometryczne (np. $\sin x$),

$e)$ funkcje wykładnicze (np. e^x).

5 Całki zawierające trójmian kwadratowy

5.1 Całki typu $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$

a) $\boxed{m=0}$ Zapisując mianownik funkcji podcałkowej w postaci kanonicznej

$$ax^2+bx+c = a(x+k)^2 + l,$$

a następnie stosując podstawienie

$$t = 2ax+b,$$

sprowadzamy rachunki do obliczenia całki

$$\int \frac{1}{t^2+A^2}\,dt \qquad \text{lub} \qquad \int \frac{1}{t^2-A^2}\,dt.$$

b) $\boxed{m\neq 0}$ Mamy wtedy

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx =$$
$$= \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}.$$

W powyższej równości wykorzystaliśmy wzór $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$. Pozostaje teraz do ostatniej całki zastosować wcześniejszą metodę.

5.2 Całki typu $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Podobnie jak w przypadku całek z punktu 5.1 zapisujemy trójmian w postaci kanonicznej i podstawiamy

$$t = ax+b,$$

co sprowadzi całkę do

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+A}}\,dt \quad \text{dla } a>0 \qquad \text{lub} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{A^2-t^2}}\,dt \quad \text{dla } a<0.$$

5.3 Całki typu $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Stosując podstawienie

$$t = \frac{1}{mx+n}$$

sprowadzamy całkę do postaci z punktu 5.2.

5.4 Całki typu $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

Ponownie przekształcamy trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej, a następnie wykonujemy standardowe podstawienie liniowe. Do obliczenia pozostanie całka

$$\int \sqrt{A^2-t^2}\,dt \qquad \text{lub} \qquad \int \sqrt{t^2+A}\,dt.$$

6 Całki funkcji wymiernych

Niech P oraz Q, $Q \neq 0$, będą dowolnymi wielomianami. Interesuje nas znalezienie całki z funkcji wymiernej $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, to znaczy

$$\int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Jeżeli stopień wielomianu P jest nie mniejszy od stopnia wielomianu Q, to należy najpierw wykonać dzielenie z resztą wielomianu P przez Q. Wtedy

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x),$$

gdzie stopień reszty r jest mniejszy od stopnia Q. Stąd

$$\int R(x)\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Będziemy zatem od tej pory zakładać, że licznik ma mniejszy stopień od mianownika.

6.1 Metoda współczynników nieoznaczonych

Wielomian Q można rozłożyć na iloczyn czynników nierozkładalnych, to znaczy

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}, \tag{1}$$

gdzie żaden z wielomianów $x^2 + b_ix + c_i$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy istnieją stałe $A_i^j, B_k^l, C_k^l \in \mathbb{R}$, takie że

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_2^1}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \ldots + \\ + \frac{A_1^n}{x-a_n} + \frac{A_2^n}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}^n}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \\ \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta_1}^1x+C_{\beta_1}^1}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \ldots + \\ + \frac{B_1^mx+C_1^m}{x^2+b_mx+c_m} + \frac{B_2^mx+C_2^m}{(x^2+b_mx+c_m)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta_1}^mx+C_{\beta_1}^m}{(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Po wymnożeniu równania (2) obustronnie przez $Q(x)$, nieznane stałe można wyznaczyć na przykład poprzez

- I sposób porównanie współczynników przy odpowiednich potęgach x-ów,
- II sposób wstawienie do przekształconego równania (2) dowolnych wartości rzeczywistych x, otrzymując układ równań do rozwiązania.

Mając dany rozkład na ułamki proste, aby znaleźć całkę $\int R(x)\,dx$ zauważmy najpierw, że

$$\int \frac{A_i^j}{(x-a_j)^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{A_i^j}{(x-a_j)^{\alpha-1}}.$$

Pozostaje zatem wyznaczyć całki typu

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n}\, dx. \tag{3}$$

Na początek, przez sprowadzenie trójmianu do postaci kanonicznej oraz odpowiednie podstawienie, przekształcamy całkę (3) do postaci

$$\int \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^n}\, dx,$$

a następnie rozdzielamy

$$\int \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^n}\, dx = D \int \frac{x}{(x^2 + 1)^n}\, dx + E \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n}\, dx.$$

Oczywiście, po zastosowaniu podstawienia $x^2 + 1 = t$, otrzymujemy

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^n}\, dx = \int \frac{1}{2t^n}\, dt = \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{t^{n-1}} = \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}}. \tag{4}$$

Całki

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n}\, dx$$

nie wyznaczymy *explicite*, natomiast podamy formułę redukcyjną, która umożliwi wyznaczania jej wartości dla konkretnego n.

Oznaczmy najpierw

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n}\, dx.$$

Wtedy

$$I_n = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(x^2 + 1)^n}\, dx = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}}\, dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}\, dx = I_{n-1} - \int x \frac{x}{(x^2 + 1)^n}\, dx.$$

Na mocy wzoru na całkowanie przez części, wykorzystując równość (4), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I_n &= I_{n-1} - \frac{1}{2(1-n)} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}}\, dx = \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2(1-n)} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1} = \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Wystarczy zatem znać wartość $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x$ oraz skorzystać z formuły redukcyjnej, aby obliczyć dowolną całkę typu (3).

6.2 Metoda Ostrogradskiego

W przypadku, gdy wielomian Q ma pierwiastki wielokrotne (co oznacza, że w rozkładzie (1) przynajmniej jedna z liczb α_i, β_j jest większa od 1) wiemy, że

$$\int R(x)\, dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}\, dx, \tag{5}$$

gdzie Q_1 jest największym wspólnym dzielnikiem wielomianów Q i Q' (pochodnej wielomianu Q), a wielomian Q_2 dany jest równością

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}.$$

Funkcje X oraz Y są wielomianami, których stopnie są mniejsze odpowiednio od stopni wielomianów Q_1 i Q_2. Współczynniki X, Y można wyznaczyć różniczkując równość (5).

7 Całki funkcji niewymiernych

7.1 Całki typu $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right]$

Niech

$$\widehat{R}(x) = R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right]$$

będzie funkcją wymierną zmiennych $x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots$ dla pewnych liczb całkowitych $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$. Wtedy całkę

$$\int \widehat{R}(x)\, dx$$

znajdujemy przez podstawienie

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdzie n jest najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników $q_1, q_2, \ldots$, sprowadzając ją do jednej z całek rozważanych wcześniej.

7.2 Całki typu $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$

Jeżeli P_n jest wielomianem stopnia n, to powyższą całkę można zapisać jako

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx, \tag{6}$$

gdzie Q_{n-1} jest wielomianem stopnia $n-1$, a λ pewną liczbą rzeczywistą. Współczynniki wielomianu Q_{n-1} oraz stałą λ znajdujemy, różniczkując równość (6).

7.3 Całki typu $\int \frac{1}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$

Powyższa całka sprowadza się do całki z punktu 7.2 przez podstawienie

$$t = \frac{1}{x-a}.$$

8 Całki dwumienne $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

Niech liczby m, n oraz p będą wymierne. Całkę dwumienną można przedstawić jako kombinację funkcji elementarnych wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków

a) *p jest liczbą całkowitą* (otrzymujemy całkę z sumy jednomianów).

b) $\frac{m+1}{n}$ *jest liczbą całkowitą*. Stosujemy wtedy podstawienie $t^s = a + bx^n$, gdzie s jest mianownikiem liczby p.

c) $\frac{m+1}{n} + p$ *jest liczbą całkowitą*. Stosujemy wtedy podstawienie $t^s = ax^{-n} + b$.

9 Całki funkcji trygonometrycznych

9.1 Całki typu $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

Oznaczmy powyższą całkę przez $I_{m,n}$ dla dowolnych liczb całkowitych m, n. W zależności od parzystości m oraz n stosujemy jedną z poniższych metod:

a) $m = 2k+1$ *jest dodatnią liczbą nieparzystą*. Wtedy

$$I_{m,n} = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x\,dx$$

i stosujemy podstawienie $t = cosx$.

b) $n = 2k+1$ *jest dodatnią liczbą nieparzystą*. Podobnie jak poprzednio

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\,dx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k \cos x\,dx$$

i stosujemy podstawienie $t = \sin x$.

c) *m i n są dodatnimi liczbami parzystymi*. Przekształcamy całkę, wykorzystując wzory trygonometryczne

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \qquad 2\sin x\cos x = \sin(2x).$$

d) *m i n są ujemnymi liczbami jednakowej parzystości*. Mamy

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \frac{1}{\sin^{-m} x \cos^{n-2} x} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}\right)^{-m/2} (1+\mathrm{tg}^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \\ &= \int \frac{(1+t^2)^{\frac{m+n}{2}-1}}{t^m}\,dt, \end{aligned}$$

wykorzystując podstawienie $t = \mathrm{tg}\,x$.

e) $n = -m$. Zapisujemy całkę w postaci $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ lub $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, tak aby wykładnik m był dodatni. Następnie wykorzystujemy tożsamość

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

f) W pozostałych przypadkach można wykorzystać metodę redukcyjną, podobną do przedstawionej w punkcie 6.1.

9.2 Całki typu $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$

W całkach postaci $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$, $\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx$ lub $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$ wykorzystujemy wzory

$$\begin{aligned}
\sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],\\
\sin(mx)\sin(nx) &= \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],\\
\cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].
\end{aligned}$$

9.3 Całki typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Jeżeli R jest funkcją wymierną, to przez podstawienie

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

możemy sprowadzić badaną całkę do całki funkcji wymiernej. Korzystamy przy tym z tożsamości

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

W przypadku, gdy zachodzi równość

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x),$$

możemy podstawiać

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Wtedy

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad x = \operatorname{arc\,tg} t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Uwaga. Analogicznych metod jak we wszystkich powyższych typach można używać do całek funkcji hiperbolicznych.

10 Podstawienie trygonometryczne i hiperboliczne

10.1 Całki typu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$

Przez sprowadzenie trójmianu do postaci kanonicznej oraz standardowe podstawienie przekształcamy całkę do jednej z poniższych postaci

a) $\int R(t, \sqrt{A^2-t^2})\, dt$,

b) $\int R(t, \sqrt{A^2+t^2})\, dt$,

c) $\int R(t, \sqrt{t^2-A^2})\, dt$.

Następnie, stosujemy odpowiednie podstawienia

a) $t = A \operatorname{tgh} u$ lub $t = A \sin u$,

b) $t = A \sinh u$ lub $t = A \operatorname{tg} u$,

c) $t = A \cosh u$ lub $t = A \frac{1}{\cos u}$.

Warto przy tej okazji pamiętać o podstawowych tożsamościach hiperbolicznych

- $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$,
- $\sinh^2 u = \frac{\cosh(2u) - 1}{2}$,
- $\cosh^2 u = \frac{\cosh(2u) + 1}{2}$,
- $2 \sinh u \cosh u = \sinh(2u)$.

Ponadto, jeżeli $t = \sinh u$, to

$$\cosh u = \sqrt{1+t^2}, \qquad u = \ln(t + \sqrt{t^2+1}),$$

natomiast jeżeli $t = \cosh u$, to

$$\sinh u = \sqrt{t^2-1}, \qquad u = \ln(t - \sqrt{t^2-1}).$$