

Tablice Całek

29 grudnia 2003 roku

Spis treści

1	Wzory podstawowe	2
2	Całkowanie funkcji wielomianowych	4
3	Całkowanie funkcji wymiernych	5
4	Całkowanie funkcji niewymiernych	7
5	Całkowanie funkcji trygonometrycznych	8
6	Całkowanie funkcji wykładniczych	9
7	Całkowanie przez części i podstawienie	10

1 Wzory podstawowe

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
4. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, dla $n \neq -1$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$
7. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
8. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
10. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
12. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
13. $\int^1 \sinh x dx = -^2 \cosh x + C$
14. $\int \cos x dx = \sin x + C$
15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
16. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -^3 \cot x + C$
17. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -^4 \coth x + C$
18. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
19. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = ^5 \tanh x + C$
20. $\int e^x dx = e^x + C$

¹ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, jest to sinus hiperboliczny

² $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, jest to cosinus hiperboliczny

³ $\cot x$ oznacza cotangens

⁴ $\cot x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, jest to cotangens hiperboliczny

⁵ $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, jest to tangens hiperboliczny

21. $\int m^x dx = \frac{m^x}{\ln m} + C$, dla $m > 0$ i $m \neq 1$

22. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

23. $\int \arctan x dx = x \arctan x - \ln \sqrt{x^2 + 1}$

2 Całkowanie funkcji wielomianowych

1. $\int 0 dx = C$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

4. $\int (ax + b) dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + C$

5. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, dla $n \neq -1$

6. $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax + b)^{n+1} + C$, dla $a \neq 0$ i $n \neq -1$

7. $\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C$

3 Całkowanie funkcji wymiernych

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
2. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
4. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$, dla $n \neq 1$
5. $\int \frac{dx}{1+(ax+b)^2} = \frac{1}{a} \arctan(ax+b) + C$, dla $a \neq 0$
6. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$, dla $a \neq 0$
7. $\int \frac{dx}{b+(x-a)^2} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan \frac{x-a}{\sqrt{b}} + C$, dla $b > 0$
8. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$, dla $a > 0$ i $|x| \neq a$
9. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$, dla $a \neq 0$
10. $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + C$
11. $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a(1-n)(ax+b)^{n-1}} + C$, dla $n \neq 1$
12. $\int \frac{Ax+B}{ax+b} dx = \frac{A}{a} x + \frac{aB-Ab}{a^2} \ln |ax+b| + C$, dla $a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}} \arctan \frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}} + C$, dla $a \neq 0$ oraz $\Delta < 0$
14. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \right| + C$, dla $a \neq 0$ oraz $\Delta > 0$
15. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = -\frac{1}{ax+\frac{b}{2}} + C$, dla $a \neq 0$ oraz $\Delta = 0$
16. $\int \frac{dx}{b+x^2} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan \frac{x}{\sqrt{b}} + C$, dla $b > 0$
17. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \frac{2aB-Ab}{a\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}} + C$,
dla $a \neq 0$ oraz $\Delta < 0$
18. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \frac{2aB-Ab}{2a\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \right| + C$, dla
 $a \neq 0$ oraz $\Delta > 0$

19. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2aB-Ab}{2a} \left(-\frac{1}{ax+\frac{b}{2}}\right) + C$, dla $a \neq 0$ oraz $\Delta = 0$
20. $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{A}{2a(1-n)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2aB-bA}{2a^{n+1}\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, dla $a \neq 0$, $n \neq 1$, $\Delta < 0$ oraz $t = \frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}}$
21. $\int \frac{Ax^2+Bx+C}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{a}x + \frac{B-\frac{bA}{a}}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2a(C-\frac{cA}{a})-(B-\frac{bA}{a})b}{a\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}} + C$, dla $a \neq 0$ oraz $\Delta < 0$
22. $\int \frac{Ax^2+Bx+C}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{a}x + \frac{B-\frac{bA}{a}}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2a(C-\frac{cA}{a})-(B-\frac{bA}{a})b}{2a\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \right| + C$, dla $a \neq 0$ oraz $\Delta > 0$
23. $\int \frac{Ax^2+Bx+C}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{a}x + \frac{B-\frac{bA}{a}}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2a(C-\frac{cA}{a})-(B-\frac{bA}{a})b}{2a} \left(-\frac{1}{ax+\frac{b}{2}}\right) + C$, dla $a \neq 0$ oraz $\Delta = 0$
24. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)} \ln |x-a| + \frac{1}{(b-a)(b-c)} \ln |x-b| + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \ln |x-c| + C$, dla $a \neq b \neq c$
25. $\int \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx = \frac{Aa+B}{(a-b)(a-c)} \ln |x-a| + \frac{Ab+B}{(b-a)(b-c)} \ln |x-b| + \frac{Ac+B}{(c-a)(c-b)} \ln |x-c| + C$, dla $a \neq b \neq c$

4 Całkowanie funkcji niewymiernych

1. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$
2. $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} (ax+b) \sqrt{(ax+b)}$, dla $a \neq 0$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{(ax+b)}} dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$, dla $a \neq 0$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} = \frac{1}{a} \arcsin(ax+b) + C$, dla $a \neq 0$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, dla $a > 0$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$, dla $a \neq 0$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+(ax+b)^2}} = \frac{1}{a} \ln((ax+b) + \sqrt{(ax+b)^2+1}) + C$, dla $a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$, dla $|x| > 1$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)^2-1}} = \frac{1}{a} \ln|(ax+b) + \sqrt{(ax+b)^2-1}| + C$, dla $|ax+b| > 1$ i $a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+bx+c}} = \ln|x + \frac{1}{2}b + \sqrt{x^2+bx+c}| + C$, dla $\Delta < 0$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{\sqrt{-ax-\frac{b}{2\sqrt{-a}}}}{\sqrt{\frac{\Delta}{-4a}}} + C$, dla $a < 0$, oraz $\Delta > 0$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|\sqrt{ax+\frac{b}{2\sqrt{a}}} + \sqrt{ax^2+bx+c}| + C$, dla $a > 0$ i $\Delta < 0$
16. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aB-Ab}{2a\sqrt{a}} \ln|\sqrt{ax+\frac{b}{2\sqrt{a}}} + \sqrt{ax^2+bx+c}| + C$, dla $a > 0$ i $\Delta < 0$
17. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aB-Ab}{2a\sqrt{-a}} \arcsin \frac{\sqrt{-ax-\frac{b}{2\sqrt{-a}}}}{\sqrt{\frac{\Delta}{-4a}}} + C$, dla $a < 0$, oraz $\Delta > 0$

⁶ $\Delta = b^2 - 4ac$ oznacza delt równania kwadratowego

5 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
2. $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$
3. $\int \cos x dx = \sin x + C$
4. $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$
5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
8. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$
9. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
10. $\int \sinh(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cosh(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$
11. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
12. $\int \cosh(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sinh(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$
13. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$
14. $\int \frac{1}{\cosh^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tanh(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$
15. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + C$
16. $\int \frac{1}{\sinh^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \coth(ax + b) + C$, dla $a \neq 0$

6 Całkowanie funkcji wykładniczych

1. $\int e^x dx = e^x + C$
2. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$, dla $a \neq 0$
3. $\int m^x dx = \frac{m^x}{\ln m} + C$, dla $m > 0$ i $m \neq 1$
4. $\int m^{ax+b} dx = \frac{m^{ax+b}}{a \ln m} + C$, dla $d > 0$, $m \neq 1$ i $a \neq 0$

7 Całkowanie przez części i podstawienie

1. $\int \ln(ax + b)dx = \frac{1}{a}[(ax + b) \ln(ax + b) - (ax + b)] + C$, dla $a \neq 0$

2. $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C$

3. $\int \arctan(ax + b)dx = \frac{1}{a}[(ax + b) \arctan(ax + b) - \ln \sqrt{(ax + b)^2 + 1}] + C$