CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA



**WYPEŁNIA ZDAJĄCY**

KOD | PESEL

*Miejsce na naklejkę.*
*Sprawdź, czy kod na naklejce to* **E-100**.
*Jeżeli tak – przyklej naklejkę.*
*Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.*

# Egzamin maturalny

*Formuła 2015*

# MATEMATYKA

## Poziom podstawowy

*Symbol arkusza*
EMAP-P0-100-2405

**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę.

DATA: **8 maja 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **170 minut**

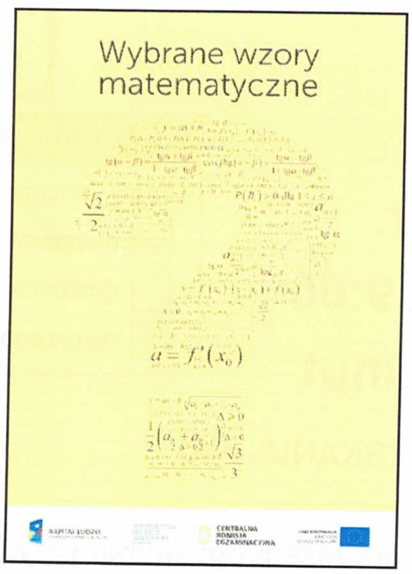
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **46**

**Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym**

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 31 stron (zadania 1–36). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–29) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (30–36) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.**

*W każdym z zadań od 1. do 29. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.*

## Zadanie 1. (0–1)

Na początku sezonu letniego cenę $x$ pary sandałów podwyższono o $20\%$. Po miesiącu nową cenę obniżono o $10\%$. Po obu tych zmianach ta para sandałów kosztowała $81$ zł. Początkowa cena $x$ pary sandałów była równa

**A.** $45$ zł **B.** $73{,}63$ zł **C.** $75$ zł **D.** $87{,}48$ zł

$1{,}2 \cdot 0{,}9x = 81$
$x = 75$

## Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\left(\frac{1}{16}\right)^8 \cdot 8^{16}$ jest równa

**A.** $2^{24}$ **B.** $2^{16}$ **C.** $2^{12}$ **D.** $2^8$

$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{32} = 2^{-32}$ $8^{16} = (2^3)^{16} = 2^{48}$ $2^{-32} \cdot 2^{48} = 2^{16}$

## Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\log_{\sqrt{3}} 9$ jest równa

**A.** $2$ **B.** $3$ **C.** $4$ **D.** $9$

$\log_{\sqrt{3}} 9 = x$
$\sqrt{3}^x = 9 \Rightarrow x = 4$

## Zadanie 4. (0–1)

Dla każdej liczby rzeczywistej $a$ i dla każdej liczby rzeczywistej $b$ wartość wyrażenia $(2a+b)^2 - (2a-b)^2$ jest równa wartości wyrażenia

**A.** $8a^2$ **B.** $8ab$ **C.** $-8ab$ **D.** $2b^2$

## Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$1 - \frac{3}{2}x < \frac{2}{3} - x$$

jest przedział

**A.** $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ **B.** $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

## Zadanie 6. (0–1)

Największą liczbą będącą rozwiązaniem rzeczywistym równania $x(x+2)(x^2+9)=0$ jest

A. $(-2)$ B. $0$ C. $2$ D. $3$

$x=0 \lor x+2=0 \lor x^2+9=0$
$x=0 \lor x=-2 \lor x\in\emptyset$

## Zadanie 7. (0–1)

Równanie $\frac{x+1}{(x+2)(x-3)}=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązania.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $(-1)$.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania: $(-2)$ oraz $3$.

D. ma dokładnie trzy rozwiązania: $(-1)$, $(-2)$ oraz $3$.

## Zadanie 8. (0–1)

W październiku 2022 roku założono dwa sady, w których posadzono łącznie $1960$ drzew. Po roku stwierdzono, że uschło $5\%$ drzew w pierwszym sadzie i $10\%$ drzew w drugim sadzie. Uschnięte drzewa usunięto, a nowych nie dosadzano.

Liczba drzew, które pozostały w drugim sadzie, stanowiła $60\%$ liczby drzew, które pozostały w pierwszym sadzie.

Niech $x$ oraz $y$ oznaczają liczby drzew posadzonych – odpowiednio – w pierwszym i drugim sadzie.

Układem równań, którego poprawne rozwiązanie prowadzi do obliczenia liczby $x$ drzew posadzonych w pierwszym sadzie oraz liczby $y$ drzew posadzonych w drugim sadzie, jest

A. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0{,}6\cdot 0{,}95x=0{,}9y \end{cases}$

B. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0{,}95x=0{,}6\cdot 0{,}9y \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0{,}05x=0{,}6\cdot 0{,}1y \end{cases}$

D. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0{,}4\cdot 0{,}95x=0{,}9y \end{cases}$

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

## Zadanie 9. (0–1)

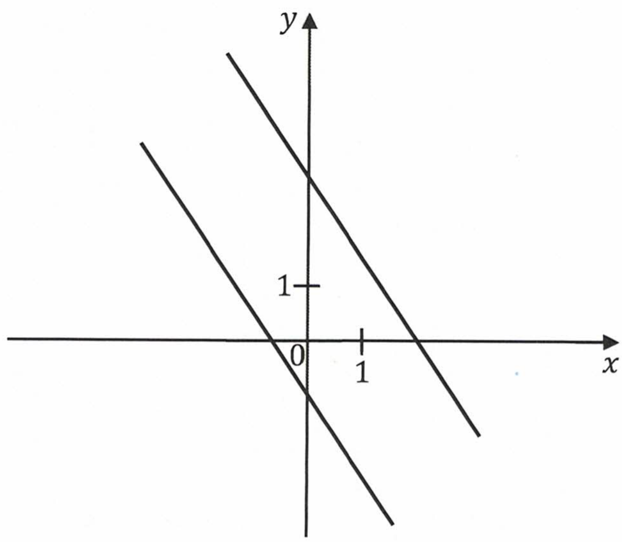
Średnia arytmetyczna trzech liczb: $a$, $b$, $c$, jest równa $9$.

Średnia arytmetyczna sześciu liczb: $a$, $a$, $b$, $b$, $c$, $c$, jest równa

**A.** $9$ **B.** $6$ **C.** $4{,}5$ **D.** $18$

## Zadanie 10. (0–1)

Na rysunku przedstawiono dwie proste równoległe, które są interpretacją geometryczną jednego z poniższych układów równań A–D.




Układem równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku, jest

**A.** $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

**B.** $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

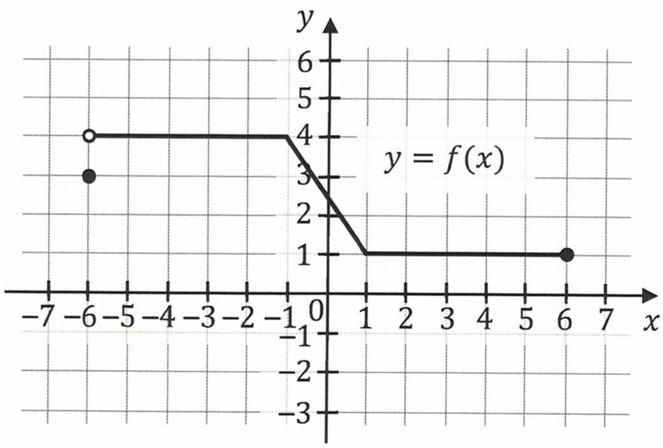
**C.** $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

**D.** $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x - 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

## Zadanie 11. (0–1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f$.




Zbiorem wartości tej funkcji jest

**A.** $(-6, 6\rangle$  **B.** $\langle 1, 4)$  **C.** $\langle 1, 4\rangle$  **D.** $\langle -6, 6\rangle$

## Zadanie 12. (0–1)

Funkcja liniowa $f$ jest określona wzorem $f(x) = (-2k + 3)x + k - 1$, gdzie $k \in \mathbb{R}$.
Funkcja $f$ jest malejąca dla każdej liczby $k$ należącej do przedziału

**A.** $(-\infty, 1)$  **B.** $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$  **C.** $(1, +\infty)$  **D.** $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

## Zadanie 13. (0–1)

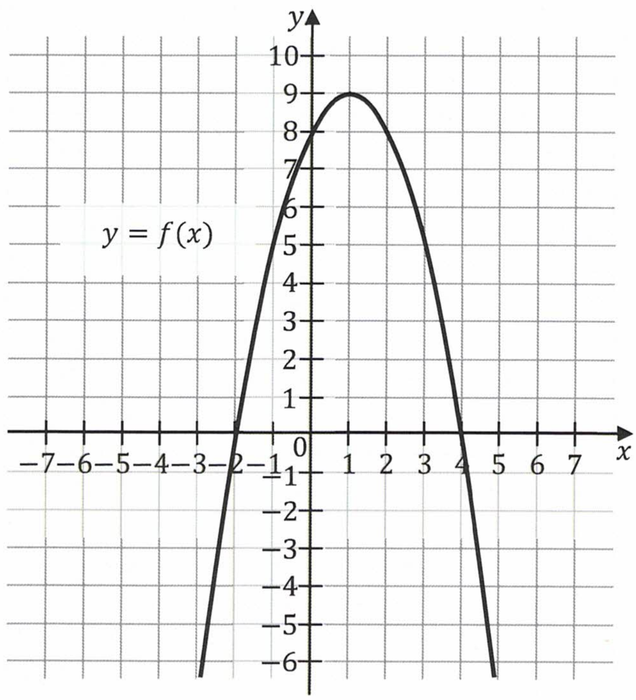
Funkcje liniowe $f$ oraz $g$, określone wzorami $f(x) = 3x + 6$ oraz $g(x) = ax + 7$, mają to samo miejsce zerowe.
Współczynnik $a$ we wzorze funkcji $g$ jest równy

**A.** $\left(-\frac{7}{2}\right)$  **B.** $\left(-\frac{2}{7}\right)$  **C.** $\frac{2}{7}$  **D.** $\frac{7}{2}$

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

## Informacja do zadań 14.–15.

Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $f$ (zobacz rysunek). Wierzchołek tej paraboli oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych mają obie współrzędne całkowite.




## Zadanie 14. (0–1)

Funkcja kwadratowa $f$ jest określona wzorem

A. $f(x) = -(x+1)^2 - 9$

B. $f(x) = -(x-1)^2 + 9$

C. $f(x) = -(x-1)^2 - 9$

D. $f(x) = -(x+1)^2 + 9$

## Zadanie 15. (0–1)

Dla funkcji $f$ prawdziwa jest równość

A. $f(-4) = f(6)$

B. $f(-4) = f(4)$

C. $f(-4) = f(5)$

D. $f(-4) = f(7)$

**BRUDNOPIS** (*nie podlega ocenie*)

## Zadanie 16. (0–1)

W ciągu arytmetycznym $(a_n)$, określonym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, dane są wyrazy $a_4 = -2$ oraz $a_6 = 16$.
Piąty wyraz tego ciągu jest równy

$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{-2+16}{2} = 7$

**A.** $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $7$ **D.** $9$

## Zadanie 17. (0–1)

Ciąg geometryczny $(a_n)$ jest określony wzorem $a_n = 2^{n-1}$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Iloraz tego ciągu jest równy

$a_1 = 2^0 = 1$

$a_2 = 2$

$q = \frac{2}{1} = 2$

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $(-2)$ **C.** $2$ **D.** $1$

## Zadanie 18. (0–1)

$-2$ $7$

Ciąg $(b_n)$ jest określony wzorem $b_n = (n+2)(7-n)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Liczba dodatnich wyrazów ciągu $(b_n)$ jest równa

$b_n > 0$

**A.** $6$ **B.** $7$ **C.** $8$ **D.** $9$


$n \in (-2, 7) \wedge n \geq 1 \wedge n \in N$

$n \in \{1, \dots 6\}$

## Zadanie 19. (0–1)

Liczba $\sin^3 20° + \cos^2 20° \cdot \sin 20°$ jest równa

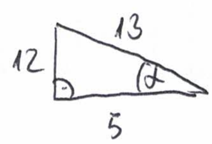
**A.** $\cos 20°$ **B.** $\sin 20°$

**C.** $\operatorname{tg} 20°$ **D.** $\sin 20° \cdot \cos 20°$

## Zadanie 20. (0–1)

Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

**A.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ **D.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{13}{12}$



**BRUDNOPIS** (*nie podlega ocenie*)

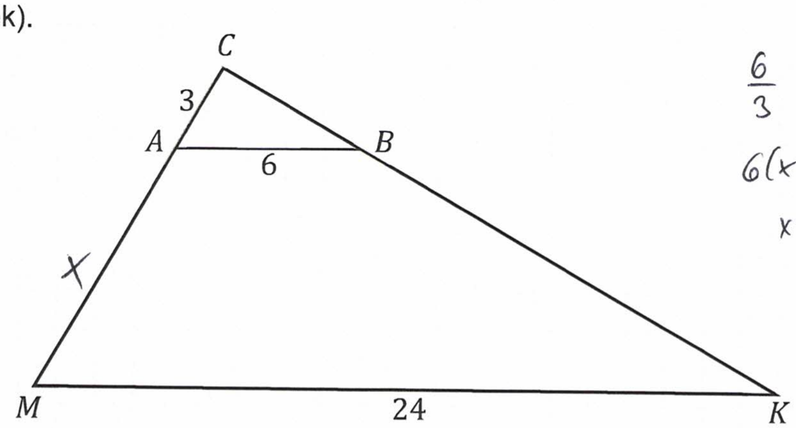
## Zadanie 21. (0–1)

Dany jest równoległobok o bokach długości $3$ i $4$ oraz o kącie między nimi o mierze $120°$. Pole tego równoległoboku jest równe

**A.** $6$ **B.** $6\sqrt{3}$ **C.** $12$ **D.** $12\sqrt{3}$

## Zadanie 22. (0–1)

W trójkącie $MKC$ bok $MK$ ma długość $24$. Prosta równoległa do boku $MK$ przecina boki $MC$ i $KC$ – odpowiednio – w punktach $A$ oraz $B$ takich, że $|AB| = 6$ i $|AC| = 3$ (zobacz rysunek).




$\frac{6}{3} = \frac{24}{x+3}$

$6(x+3) = 3 \cdot 24 \;/ : 6$

$x+3 = 12$

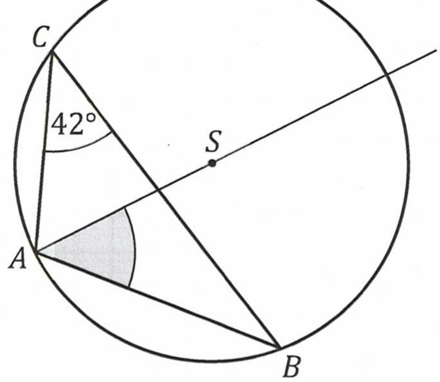
$x = 9$

Długość odcinka $MA$ jest równa

**A.** $18$ **B.** $15$ **C.** $9$ **D.** $12$

## Zadanie 23. (0–1)

W trójkącie $ABC$, wpisanym w okrąg o środku w punkcie $S$, kąt $ACB$ ma miarę $42°$ (zobacz rysunek).




Miara kąta ostrego $BAS$ jest równa

**A.** $42°$ **B.** $45°$ **C.** $48°$ **D.** $69°$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

## Zadanie 24. (0–1)

Proste $k$ oraz $l$ są określone równaniami

$$k\colon\ y = (m+1)x + 7$$

$$l\colon\ y = -2x + 7$$

Proste $k$ oraz $l$ są prostopadłe, gdy liczba $m$ jest równa

**A.** $\left(-\frac{1}{2}\right)$  **B.** $\frac{1}{2}$  **C.** $(-3)$  **D.** $1$

## Zadanie 25. (0–1)

Na prostej $l$ o współczynniku kierunkowym $\frac{1}{2}$ leżą punkty $A = (2, -4)$ oraz $B = (0, b)$.

Wtedy liczba $b$ jest równa

$x$ $y$

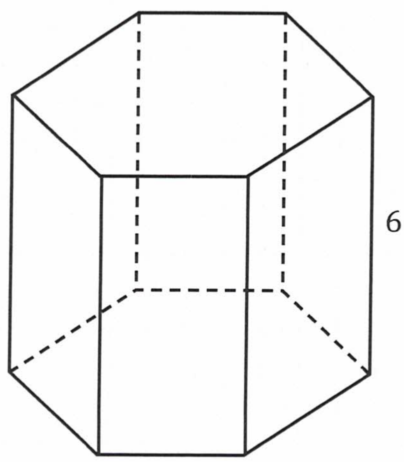
$y = \frac{1}{2}x + b$

$-4 = 1 + b \Rightarrow b = -5$

**A.** $(-5)$  **B.** $10$  **C.** $(-2)$  **D.** $0$

## Zadanie 26. (0–1)

Wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $6$ (zobacz rysunek).
Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe $15\sqrt{3}$.




Pole jednej ściany bocznej tego graniastosłupa jest równe

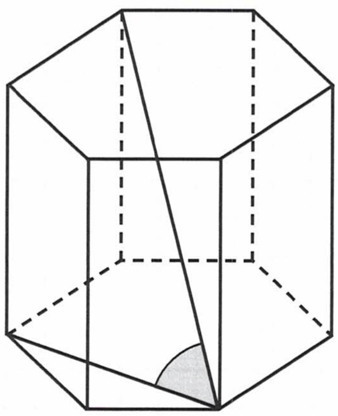
**A.** $36\sqrt{10}$  **B.** $60$  **C.** $6\sqrt{10}$  **D.** $360$

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

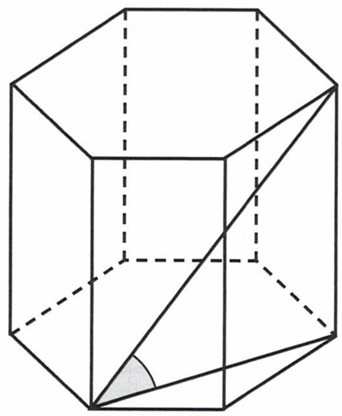
## Zadanie 27. (0–1)

Kąt nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy jest zaznaczony na rysunku

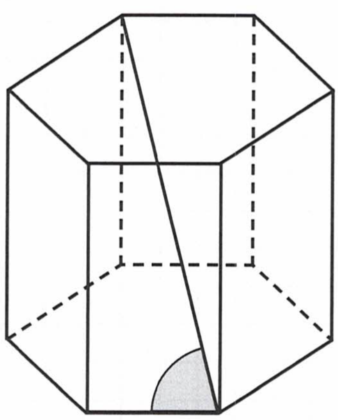
**A.**



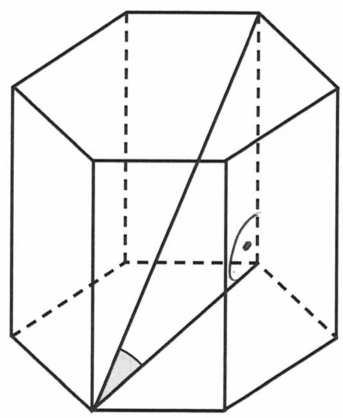
**B.**



**C.**



**D.**



## Zadanie 28. (0–1)

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $64$. Wysokość tego ostrosłupa jest równa $12$.
Długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest równa

$V = \frac{1}{3}e^2 \cdot h = 64$
$\frac{1}{3}e^2 \cdot 12 = 64$
$e^2 = 16$
$e = 4$

**A.** $2$ **B.** $4$ **C.** $6$ **D.** $8$

## Zadanie 29. (0–1)

Rozważamy wszystkie kody czterocyfrowe utworzone tylko z cyfr $1, 3, 6, 8$, przy czym w każdym kodzie każda z tych cyfr występuje dokładnie jeden raz.
Liczba wszystkich takich kodów jest równa

**A.** $4$ **B.** $10$ **C.** $24$ **D.** $16$

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

## Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$x^2 - 4 \leq 3x$$

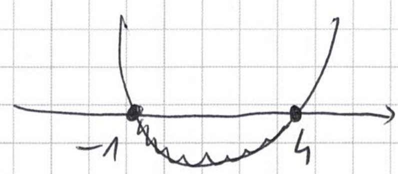
$x^2 - 3x - 4 \leq 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$

$x_2 = 4$




$x \in \langle -1, 4 \rangle$

**Zadanie 31. (0–2)**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ i dla każdej liczby rzeczywistej $y$ takich, że $x \neq y$, prawdziwa jest nierówność

Z $x \neq y$ T $(3x + y)(x + 3y) > 16xy$

$3x^2 + 9xy + xy + 3y^2 - 16xy > 0$

$3x^2 - 6xy + 3y^2 > 0 \quad /:3$

$x^2 - 2xy + y^2 > 0$

$(x-y)^2 > 0$

Prawda, bo $x \neq y$

cnd.

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 30. | 31. |
|---|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 2 | 2 |
| | Uzyskana liczba pkt | | |

**Zadanie 32. (0–2)**

Osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ jest prosta o równaniu $x = -2$. Jednym z miejsc zerowych funkcji $f$ jest liczba $1$.

Oblicz współczynniki $b$ oraz $c$.

$a = 1$

$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ oś symetrii : $x = p$

$-2 = \frac{1 + x_2}{2} \quad / \cdot 2$

$-4 = 1 + x_2$

$x_2 = -5$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = 1(x-1)(x+5) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5$

ODP. $b = 4$, $c = -5$

**Zadanie 33. (0–2)**

Ciąg arytmetyczny $(a_n)$ jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $(-1)$, a suma piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa $(-165)$.

Oblicz różnicę tego ciągu.

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

$\begin{cases} a_3 = -1 \\ S_{15} = -165 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + 2r = -1 \\ \frac{2a_1 + 14r}{2} \cdot 15 = -165 \quad /:15 \end{cases}$

$\frac{2a_1 + 14r}{2} = -11 \quad / \cdot 2$

$2a_1 + 14r = -22 \quad /:2$

$a_1 + 7r = -11$

$a_1 = -11 - 7r$

$-11 - 7r + 2r = -1$

$-5r = 10$

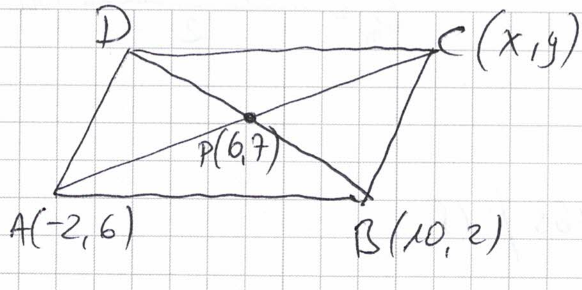
$\underline{\underline{r = -2}}$

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 32. | 33. |
|---|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 2 | 2 |
| | Uzyskana liczba pkt | | |

**Zadanie 34. (0–2)**

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $A = (-2, 6)$ oraz $B = (10, 2)$. Przekątne $AC$ oraz $BD$ tego równoległoboku przecinają się w punkcie $P = (6, 7)$.

Oblicz długość boku $BC$ tego równoległoboku.




C: $\frac{-2+x}{2} = 6$ $\qquad$ $\frac{6+y}{2} = 7$

$-2+x = 12$ $\qquad$ $6+y = 14$

$x = 14$ $\qquad$ $y = 8$

$C(14,8)$

$|BC| = \sqrt{(14-10)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \underline{\underline{2\sqrt{13}}}$

## Zadanie 35. (0–2)

Dany jest pięcioelementowy zbiór $K = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Wylosowanie każdej liczby z tego zbioru jest jednakowo prawdopodobne. Ze zbioru $K$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie i zapisujemy je w kolejności losowania.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą.

| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | + | | + | | + |
| 6 | | + | | + | |
| 7 | + | | + | | + |
| 8 | | + | | + | |
| 9 | + | | + | | + |

$$|\Omega| = 25$$

$$|A| = 13$$

$$P(A) = \frac{13}{25}$$

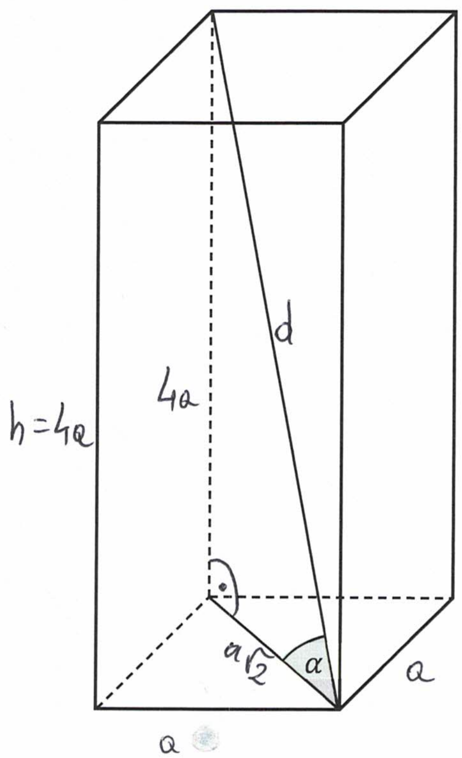
| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 34. | 35. |
|---|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 2 | 2 |
| | Uzyskana liczba pkt | | |

**Zadanie 36. (0–5)**

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o objętości równej $108$ stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości graniastosłupa jest równy $\frac{1}{4}$.

Przekątna tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem $\alpha$ (zobacz rysunek).

Oblicz cosinus kąta $\alpha$ oraz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.




$V=108$

$V=a^2\cdot h = a^2\cdot 4a = 4a^3$

$4a^3=108 \,/ :4$

$a^3=27$

$a=3$

$h=4\cdot 3 = 12$

$\frac{a}{h}=\frac{1}{4} \Rightarrow h=4a$

$d^2=(4a)^2+(a\sqrt{2})^2$

$d^2=16a^2+2a^2$

$d^2=18a^2$

$d=3a\sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{3a\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

$P_c = 2P_p + P_b$

$P_c = 2a^2 + 4\cdot ah$

$P_c = 2\cdot 9 + 4\cdot 3\cdot 12$

$P_c = 18 + 144$

$P_c = 162$