Lubelska Próba przed Maturą

Zasady oceniania rozwiązań zadań
Matematyka – poziom podstawowy
Grupa B
1 marzec 2023

Uwagi do rozwiązań zadań otwartych

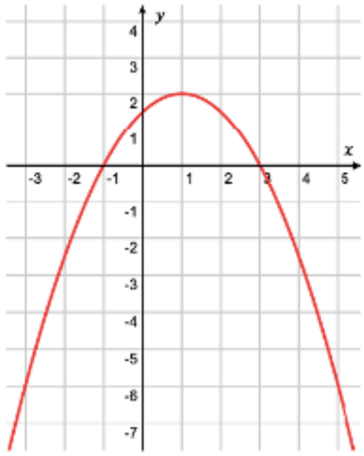
Akceptowane są rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadania zamknięte	
Numer zadania	Odpowiedź
1.	C
2.	D
3.	D
4.	A
5.	A
6.	B
7.	D
8.1.	FF
8.2.	zadanie otwarte
8.3.	zadanie otwarte
9.	A2
10.	zadanie otwarte
11.	DF
12.	C
13.	zadanie otwarte
14.	FF
15.	C
16.	C
17.1.	D
17.2.	C
18.1.	B
18.2.	zadanie otwarte
19.	A
20.	PF
21.1.	C
21.2.	B
22.	zadanie otwarte
23.	A
24.	zadanie otwarte
25.1.	C
25.2.	B
26.	A
27.	B
28.	zadanie otwarte

Zadanie 8.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono fragment funkcji kwadratowej $f(x)$. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, ma współrzędne $(1,2)$. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 3$.



Zadanie 8.2. (0–2)

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej $f(x)$ w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$$p = 1, \qquad q = 2$$

$$f(x) = a(x-1)^2 + 2$$

$$x_1 = -1 \Longrightarrow f(-1) = 0$$

$$0 = a(-1-1)^2 + 2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$$

Zasady oceniania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = a(x-1)^2 + 2$

lub w postaci iloczynowej $f(x) = a(x+1)(x-3)$,

lub obliczenie współczynnika $a = -\frac{1}{2}$

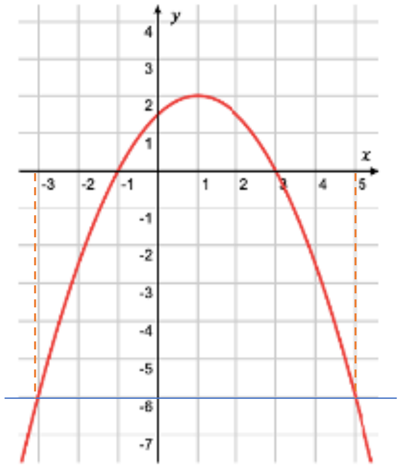
2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia postaci kanonicznej funkcji f oraz zapisanie jej wzoru: $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$.

Zadanie 8.3. (0–1)

Prosta k ma równanie $y = -6$.

Zapisz w miejscu wykropkowanym zbiór wszystkich argumentów, dla których prosta k przecina się z wykresem funkcji $f(x)$

....



Pełne rozwiązanie

$f(x) = -6$ dla $x \in \{-3,5\}$

Zasady oceniania

0 pkt – rozwiązanie, w którym odczytano błędne rozwiązania albo podane rozwiązania nie są wszystkimi rozwiązaniami.

1 pkt – zapisanie wszystkich rozwiązań: $x \in \{-3,5\}$.

Zadanie 10. (0–2)

Pewien komis samochodowy zajmuje się sprzedażą używanych samochodów. Ceny samochodów, których wartość maleje wraz z upływem lat, jest wyceniana przez komis według wzoru

$$f(t) = w_0 \cdot (0{,}78)^t$$

gdzie w_0 oznacza cenę nowego samochodu (w złotych), t – wiek samochodu (w latach). Następnie komis wystawia samochód do sprzedaży naliczając 8% marżę.

Oblicz jaka będzie cena wystawionego w komisie 2-letniego BMW M8, który w salonie kosztuje 790000 zł. Zapisz obliczenia.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$w_0 = 790000, \qquad t = 2$$

$$f(2) = 790000(0{,}78)^2 = 480636$$

$$108\%\ z\ 480636:$$

$$1{,}08 \cdot 480636 = 519086{,}88\ zł$$

Zasady oceniania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

1 pkt – poprawne obliczenie wartości funkcji f dla argumentu 2.

2 pkt – obliczenie ceny komisu (z marżą).

Zadanie 13. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n, która nie jest podzielna przez 3, kwadrat liczby n powiększony o 2 jest podzielny 3.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Liczby, które nie są podzielne przez 3 to takie, których reszta z dzielenia wynosi 1 lub 2. Dowód zadania należy przeprowadzić dla obu typów liczb, tzn.: $3k+1,\ 3k+2,\ k \in \mathbb{N}$.

$I \qquad n^2 + 2 = (3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1) = 3d, \qquad d \in \mathbb{N}$

$II \qquad n^2 + 2 = (3k+2)^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 = 3(3k^2 + 6k + 2) = 3f, \qquad f \in \mathbb{N}$

Zasady oceniania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę,
albo brak rozwiązania,
albo przeprowadzono dowodzenie na konkretnych wartościach liczbowych.

1 pkt

- stworzenie zapisu $(3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ oraz $(3k+2)^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6$
- albo przeprowadzenie pełnego dowodu dla jednego z przypadków:

  $n^2 = (3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1) = 3d, \qquad d \in \mathbb{N}$

  lub

  $n^2 = (3k+2)^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 = 3(3k^2 + 6k + 2) = 3f, \qquad f \in \mathbb{N}$

2 pkt – pełne przeprowadzenie dowodu.

Zadanie 18.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg $\mathcal{O}$ równaniu

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

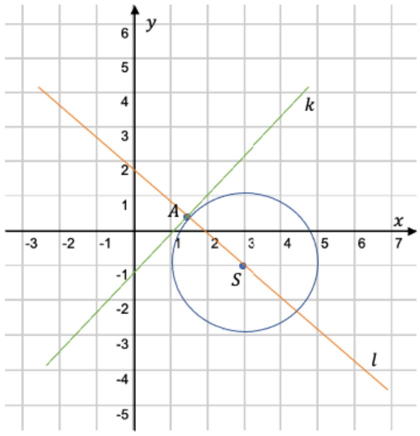
Zadanie 18.2. (0–3)

Punkt $A = \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ jest punktem leżącym na okręgu $\mathcal{O}$.

Wyznacz równanie prostej k, która jest styczna do okręgu $\mathcal{O}$ w punkcie A. Zapisz obliczenia.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Graficzna ilustracja położenia prostej i okręgu jest następująca:



Rozwiązanie zadania sprowadza się do obliczeń związanych z prostopadłością prostych k oraz l. Zadanie można podzielić na kilka etapów:

1) obliczenie współczynnika kierunkowego prostej l,
2) skorzystanie z warunku prostopadłości – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej k,
3) wyznaczenie prostej k przechodzącej przez punkt A

Ad 1) $$a_l = \frac{y_S - y_A}{x_S - x_A} \implies a_l = -\frac{3}{4}$$

Ad 2) $$a_l \cdot a_k = -1 \implies a_k = \frac{4}{3}$$

Ad 3) $$k: y = \frac{4}{3}x + b, \ A = \left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

$$b = -\frac{5}{3}$$

$$k: y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

Zasady oceniania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

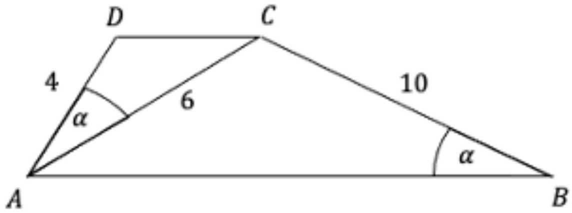
1 pkt – poprawne obliczenie współczynnika kierunkowego prostej l.

2 pkt – poprawne obliczenie współczynnika kierunkowego prostej k.

3 pkt – poprawne wyznaczenie równania prostej k przechodzącej przez punkt A.

Zadanie 22. (0–2)

Dany jest trapez $ABCD$ (patrz rysunek), w którym $AB \parallel CD$, $|AD| = 4$, $|BC| = 10$, $|AC| = 6$ oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAD$.



Oblicz długość podstawy CD. Zapisz obliczenia.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekątna AC wprowadzała podział czworokąta na dwa trójkąty podobne $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.
Wykorzystując podobieństwo figur otrzymujemy proporcję:

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$$

$$\frac{|CD|}{6} = \frac{4}{10}$$

$$|CD| = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

Zasady oceniania

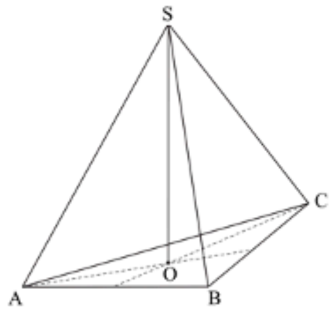
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

1 pkt – wskazanie trójkątów podobnych $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ oraz zapisanie proporcji wynikającej z podobieństwa trójkątów $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$.

2 pkt – pełne rozwiązanie.

Zadanie 24. (0–3)

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest równa $36\sqrt{3}$. Długość krawędzi AB podstawy ostrosłupa jest równa 12.



Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
Zapisz obliczenia.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy, to kąt SAO. Kąt ten jest jednym z kątów wewnętrznych trójkąta prostokątnego ASO. Zatem $\cos(\sphericalangle SAO) = \frac{|AO|}{|AS|}$. Rozwiązanie zadania sprowadza się do obliczenia długości odcinków: $|AO| = \frac{2}{3}h_p,\ H = |SO|,\ |AS|$.

1. Obliczenia w trójkącie ABC:

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad h_p = 6\sqrt{3}$$

$$|AO| = \frac{2}{3}h_p, \qquad |AO| = 4\sqrt{3}$$

2. Wykorzystanie objętości ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H,\ \ P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

$$36\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot H \ \Rightarrow H = 3$$

3. Obliczenia w trójkącie ASO:

$$|AO|^2 + |SO|^2 = |AS|^2$$

$$48 + 9 = |AS|^2 \ \Rightarrow |AS| = \sqrt{57}$$

$$\cos(\sphericalangle SAO) = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{57}} = \frac{4\sqrt{19}}{19}$$

Zasady oceniania

0 pkt – rozwiązanie, w którym źle zaznaczono kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy i w oparciu o źle zaznaczony kąt wykonano obliczenia w zadaniu,

albo brak rozwiązania.

1 pkt – obliczenie długości odcinka $|AO|$,

albo obliczenie długości odcinka $|SO|$,

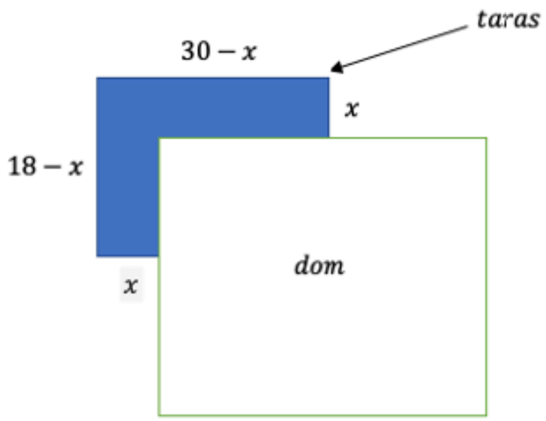
albo obliczenie długości odcinka $|AS|$.

2 pkt – obliczenie pary odcinków trójkąta prostokątnego ASO, które pozwalają wyznaczyć wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej w trójkącie ASO.

3 pkt – wyznaczenie wartości funkcji $\cos(\sphericalangle SAO)$.

Zadanie 28. (0–4)

Właściciel domu chce wybudować taras wokół lewego rogu domu, w sposób przedstawiony na poniższym rysunku (wymiary wyrażone są w metrach), na którym położy kostkę brukową.

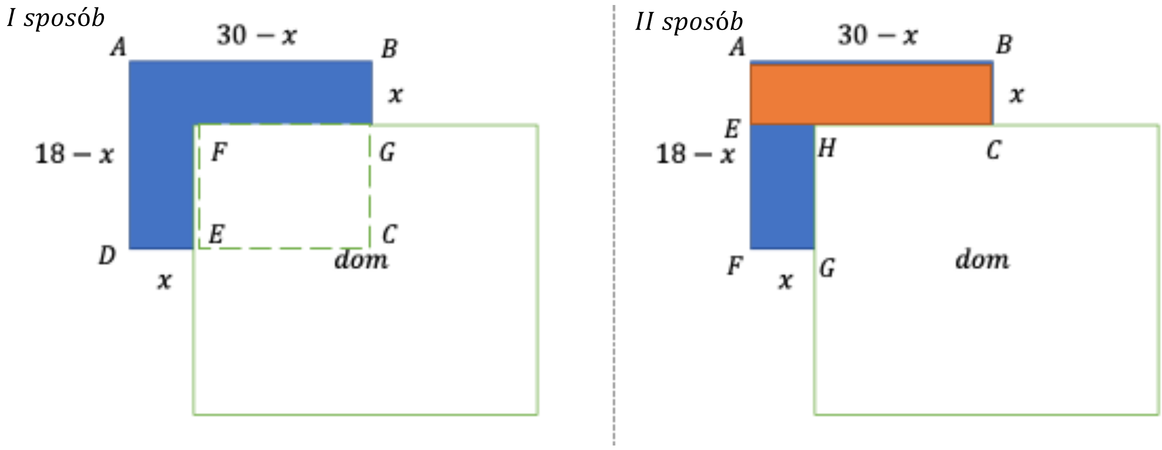


a) Napisz wzór funkcji opisującej pole powierzchni tarasu w zależności od x oraz wyznacz dziedzinę funkcji.

b) Wyznacz x, dla którego taras będzie miał powierzchnię największą. Oblicz, ile metrów kwadratowych kostki właściciel musi kupić, aby położyć ją na wybudowanym tarasie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pole powierzchni tarasu można opisać na dwa sposoby:



I sposób

Pole tarasu można zapisać jako różnicę pól prostokątów: $P = P_{ABCD} - P_{CEFG}$

$$P(x) = (18 - x)(30 - x) - (18 - 2x)(30 - 2x)$$

$$P(x) = -3x^2 + 48x$$

Należy wyznaczyć dziedzinę funkcji (długości odcinków większe od zera):

$$x > 0 \ \wedge \ 30 - x > 0 \ \wedge \ 30 - 2x > 0 \ \wedge \ 18 - x > 0 \ \wedge \ 18 - 2x > 0$$

$$D = (0; 9)$$

Obliczenie x oraz pola jako ekstremum funkcji (wraz z uzasadnieniem):

$$p = \frac{-b}{2a} = 8 \Longrightarrow x = 8$$

$$q = P(p) = P(8) = 192 \ m^2$$

II sposób

Pole tarasu można zapisać jako sumę pól prostokątów: $P = P_{ABCE} + P_{EFGH}$

$$P(x) = (18 - 2x)x + (30 - x)x$$

$$P(x) = -3x^2 + 48x$$

Należy wyznaczyć dziedzinę funkcji (długości odcinków większe od zera):

$$x > 0 \ \wedge \ 18 - 2x > 0 \ \wedge \ 30 - x > 0$$

$$D = (0; 9)$$

Pozostałe obliczenia analogiczne jak w sposobie I.

Zasady oceniania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę,
albo brak rozwiązania,

1 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji pola tarasu.

2 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji opisującej powierzchnię tarasu.

3 pkt – wyznaczenie x,
albo wyznaczenie wartości największego pola.

4 pkt – wyznaczenie x oraz największego pola wraz z uzasadnieniem największej wartości funkcji.